УДК 330.51

Гордєєв Г. Г., *к. ф.-м. н., доцент Донецької філії УДУФМТ*

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

Існуючі моделі динаміки економічних систем суттєво нелінійні, розв'язання рівнянь моделей пов'язано з деякими математичними труднощами. В роботі запропоновано новий підхід якісного дослідження цих рівнянь в руслі загальної теорії динамічних систем, також метод зведення рівнянь моделей економіки до рівнянь Гамільтона, що дозволяє застосовувати добре розроблені та ефективні методи дослідження гамільтонових систем. У гамільтоновій формі представлені рівняння загальної моделі макроекономічної динаміки Сарджента-Тарновського, нелінійної динамічної моделі багатогалузевої економіки, кінетичної моделі інфляції. Запропонована нелінійна модель динаміки ринку праці, її рівняння записані у гамільтоновій формі. Приведені приклади якісного дослідження динаміки економічних систем.

The existing models of dynamic economic systems are nonlinear. Equations of these models are difficult to solve. The present article suggests a new approach to the qualitative research of these equations within the bounds of general theory of dynamic systems. A method of substitution of equation of economic models for Hamilton's equations allows using well developed and efficient methods of Hamilton systems research. Equations of general macroeconomic dynamic of Sargent-Turnovsky, nonlinear model of multibranch economics, kinetic model of inflation are presented as Hamilton's equations. Nonlinear model of labor market dynamics, its equations are written in the form of Hamilton's equation. Some examples of qualitative research of economic systems dynamic are discussed.

Постановка проблеми. Останнім часом інтенсивно проводяться дослідження системи економіко-математичних моделей для аналізу економічного розвитку держав, в тому числі і України. З метою практичного їх застосування виникає проблема розв'язання нелінійних систем рівнянь моделей, їх якісного аналізу. Це потребує нових підходів та методів, модернізації існуючих, системного підходу до цієї проблеми.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Поставленій проблемі в вітчизняній та світовій літературі присвячується велика кількість монографій, наукових статей, підручників. Багато праць мають концептуальний характер, інші присвячені макроекономічному моделюванню [8–15]. У практиці економічного планування та прогнозування, на відміну від розвинутих країн, в Україні макроекономічні моделі використовуються недостатньо, їх дослідження та застосування є актуальним. Це відзначено в монографії [12], в якій зібрані та системно проаналізовані економіко-математичні моделі. Як показує аналіз публікацій, в існуючих моделях для розв'язання їх рівнянь застосовуються або лінійні схеми, або чисельне інтегрування, якісний аналіз використовується рідше. Це пов'язано з тим, що немає підходів, які б дали доступ до впровадження новітніх методів якісної теорії динамічних систем та нелінійної математики в аналізі економічних моделей та практичному їх застосуванню, як це робиться в механіці, фізиці, біології, математичній теорії катастроф та інших галузях знань.

Метою статті є розробка підходів, які б дали можливість якісного дослідження економічних моделей за допомогою якісної теорії динамічних систем, ефективної та універсальної теорії гамільтонових систем.

Виклад основного матеріалу. Створення нових моделей динаміки економічних процесів, дослідження їх та існуючих моделей є одним із розділів математичної економіки, який в останній час інтенсивно розвивається. Аналіз економічних проблем за допомогою динамічних моделей приводить до необхідності розв'язання лінійних та нелінійних систем рівнянь. Економічна динаміка є, по суті, розділом теорії динамічних систем, яка повною мірою розроблена в працях Пуанкаре А. [1], Біркгофа Д. [2], Ляпунова О.М. [3], Андронова А.А. [4]. Методи аналізу нелінійних моделей механіки стали в подальшому основою якісної теорії диференціальних рівнянь та нелінійної теорії динамічних систем, методи яких можуть бути математичним інструментом дослідження моделей економічних систем.

Багато існуючих моделей економічної динаміки зводяться до розгляду системи двох в загальному випадку нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = f_1(q_1, q_2), \\ \dot{q}_2 = f_2(q_1, q_2), \end{cases} \qquad (1)$$

де функції часу $q_1(t)$, $q_2(t)$ описують стан системи, а крапкою позначена похідна функції часу t.

Система (1), коли функції $q_1(t)$, $q_2(t)$ визначені у всій площині (q_1, q_2) (q_1, q_2 – координати) або у деякій множині на площині, задовольняють умовам теореми існування та єдності розв'язку і називається автономною динамічною системою другого порядку.

Існують моделі економічної динаміки, які можна представити диференціальним рівнянням другого порядку:

$$\ddot{q} - f(q, \dot{q}) = 0 . \quad (2)$$

Його можна записати у вигляді системи (1), якщо позначити $q_1 = q$, $q_2 = \dot{q}$, $f_1(q_1, q_2) = q_2$, $f_2(q_1, q_2) = f(q_1, q_2)$.

Як було доведено Дираком П. [5], довільну систему диференціальних рівнянь можна записати у вигляді рівнянь Гамільтона. Це можна зробити за допомогою введення канонічних змінних методом подвоєння змінних. Гамільтонів формалізм створювався для розв'язання задач теоретичної фізики (спочатку механіки) і в теперішній час є ефективною теорією для побудови точних та наближених розв'язків систем лінійних та нелінійних рівнянь. До гамільтонової форми приводяться рівняння, які повинні бути екстремалями деякої варіаційної задачі, чого, як правило, нема в моделях, які побудовані не на варіаційних принципах (це моделі економіки, біології та інші). Але метод подвоєння змінних Дирака П. [5] дозволяє записати в гамільтоновій формі будь-яку систему рівнянь. Є приклади застосування цього методу в біології [6], в динамічній теорії катастроф [7] тощо.

Рівняння економічної динаміки (1) теж можуть бути записані у вигляді рівнянь Гамільтона, а потім досліджені за допомогою добре розроблених ефективних методів нелінійної теорії гамільтонових систем.

Запишемо рівняння економічної динаміки (1) у гамільтоновій формі. Для цього поряд зі змінними q_1, q_2 введемо змінні p_1, p_2 (метод подвоєння змінних) і будуємо функцію Гамільтона (гамільтоніан):

$$H = p_1 f_1 (q_1, q_2) + p_1 f_2 (q_1, q_2) . \quad (3)$$

Тоді систему рівнянь (1) можна записати у вигляді рівнянь Гамільтона:

$$\dot{q}k = \frac{\partial H}{\partial p_k} , \ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (k=1,2). \quad (4)$$

Розглянемо приклади систем економічної динаміки, моделі яких можуть бути представленими системами рівнянь (1), (4).

1. Загальна модель макроекономічної динаміки Сарджента-Тарновського [8–10].

Макроекономічна динаміка – це складний процес поведінки економіки в цілому, який являє собою взаємодію виробників та споживачів, кредиторів та боржників, включаючи державу, на основних ринках продуктів, грошей, ресурсів. Цілостне уявлення про поведінку макроекономіки у часі дає детермінована модель Сарджента-Тарновського і являє собою систему семи рівнянь з сімома невідомими, два з яких диференціальні, а п'ять кінцеві рівняння:

$$\dot{\pi} = a(p - \pi) \ (a>0), \quad (5)$$

$$\dot{A} = G - T + rb - pA , \quad (6)$$

$$Y = D(Y^D, r - \pi, A) + G , \quad (7)$$

$$Y^D = Y - T + rb - \pi A , \quad (8)$$

$$A = m + b , \quad (9)$$

$$m = L(Y, r, A), \quad (10)$$

$$p = \pi + \alpha(Y - \overline{Y}), \quad (11)$$

де Y – прибуток (продукт, виробничий прибуток), Y^D – чистий прибуток, r – різниця прибутковості грошей та облігацій (спред), π – очікувана (не фактична) інфляція, G – державні очікувані витрати, A – приватне багатство, m – вартість грошей ($m = \frac{M}{p}$, M – гроші), p – індекс цін, b – державні облігації, які інфлятивні до індексу цін ($b = \frac{B}{p}$, B – облігації), $D(\cdot)$ – агрегирований попит на товари та послуги невиробничого споживання та інвестиційного характеру з боку приватного сектора (функція сукупного приватного попиту), $(p - \pi)$ – дійсна ставка відсотку, T – податки, rb – прибуток від приватного багатства, $L(\cdot)$ – сукупний попит на гроші, $\overline{Y}$ – рівень потенційного виробництва, a – параметр, який характеризує інерційність системи (чим вище $a > 0$, тим менше інерційність процесу), α – чутливість інфляції до змін виробництва.

Система (5)–(11) складається із динамічного (5), (6) та статичного (7)–(11) блоків. За допомогою рівнянь статичного блоку можна обчислити у точці рівноваги п'ять функцій Y, Y^D, r, p, а також m або b (згідно з вибраною політикою фінансування державного бюджету), які залежать від параметрів системи. Динамічний блок – це два диференціальних рівняння для інфлятивних очікувань та накопичення багатства.

Ці рівняння неоднорідні та нелінійні тому, що їх структура задається двома функціями, які залежать від фазових координат системи $r(\pi, A)$ та $p(\pi, A)$, а також від інших параметрів системи.

Динамічний блок (5), (6) рівнянь (5) – (11) моделі Сарджента-Тарновського можна записати у вигляді системи (1), якщо позначити:

$$q_1=\pi,\ \ q_2=A, \tag{12}$$

$$f_1(q_1, q_2) = a(p(q_1, q_2)- q_1), \tag{13}$$

$$f_2(q_1, q_2) = br(q_1, q_2)- q_2p(q_1, q_2)+G-T. \tag{14}$$

У гамільтоновій формі ця система (5), (6) буде мати вигляд (4) з функцією Гамільтона

$$\begin{aligned} H&= p_1a(p(q_1, q_2)- q_1)+\\ &+ p_2(br(q_1, q_2)- q_2p(q_1, q_2)+G-T). \end{aligned} \tag{15}$$

2. Нелінійна динамічна модель багатогалузевої економіки.

Довільна економічна система багатогалузева, в загальному випадку складається з n галузей. Динамічні рівняння балансу системи мають вигляд:

$$x_k = \sum_{m=1}^{n} x_{km} + \sum_{m=1}^{n} b_{km}\dot{x}_m + y_k \qquad (k=1,2,\dots, n), \tag{16}$$

де x_k – обсяг виробництва k-тої галузі економіки, x_{km} – обсяг виробництва k-тої галузі, який споживає m-та галузь, y_k– кінцевий продукт k-тої галузі, b_{km} – запас продукції k-тої галузі, який необхідно витратити на виробництво одиниці продукції m-тої галузі, $\sum b_{km}\dot{x}_m$ – швидкості приросту цих видів запасів, тобто це є швидкості накопичення або згортання усіх видів капіталу у їх взаємозв'язку зі зміною швидкостей випуску продукції $\dot{x}_k$ усіх галузей.

Лінійна динамічна модель багатогалузевої економіки створена В.В. Леонтьєвим [11], рівняння якої мають вигляд:

$$x_k = \sum_{m=1}^{n} a_{km}x_m + \sum_{m=1}^{n} b_{km}\dot{x}_m + y_k \qquad (k=1,2,\dots, n), \tag{17}$$

де a_{km} – коефіцієнти прямих витрат.

У загальному випадку величини x_{km} нелінійні функції обсягів виробництва x_k:

$$x_{km}= x_{km}(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (k, m=1,2,\dots, n), \tag{18}$$

(наприклад, коефіцієнти прямих витрат можуть бути функціями ($x_1, x_2, \dots, x_n$)).

У випадку двогалузевої економічної системи (n=2) рівняння (16) мають вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = x_{11} + x_{12} + b_{11}\dot{x}_1 + b_{12}\dot{x}_2 + y_1, \\ x_2 = x_{21} + x_{22} + b_{21}\dot{x}_1 + b_{22}\dot{x}_2 + y_2. \end{cases} \tag{19}$$

Розв'яжемо цю систему відносно $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = c(b_{22}x_1 - b_{12}x_2 - b_{22}x_{11} - b_{22}x_{12} - b_{12}x_{21} - b_{12}x_{22} - b_{22}y_1 - b_{22}y_2), \\ \dot{x}_2 = c(- b_{21}x_1 + b_{11}x_2 + b_{21}x_{11} + b_{21}x_{12} - b_{11}x_{21} - b_{11}x_{22} + b_{21}y_1 - b_{11}y_2), \end{cases} \tag{20}$$

причому $c = (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})^{-1} \neq 0$.

Систему рівнянь (20) можна записати у вигляді (1), якщо позначити

$$q_1 = x_1, \; q_2 = x_2, \tag{21}$$

$$f_1(q_1, q_2) = c(b_{22}\, q_1 - b_{12}\, q_2 - b_{22}\, x_{11} - b_{22}\, x_{12} + \\ + b_{12}\, x_{21} + b_{12}\, x_{22} - b_{22}\, y_1 + b_{12}\, y_2), \tag{22}$$

$$f_2(q_1, q_2) = c(- b_{21}\, q_1 + b_{11}\, q_2 + b_{21}\, x_{11} + b_{21}\, x_{12} - \\ - b_{11}\, x_{21} - b_{11}\, x_{22} + b_{21}\, y_1 - b_{11}\, y_2). \tag{23}$$

У гамільтонової формі система (20) має вигляд (4) з функцією Гамільтона

$$H = c(p_1(b_{22}\, q_1 - b_{12}\, q_2 - b_{22}\, x_{11} - b_{22}\, x_{12} + \\ + b_{12}\, x_{21} + b_{12}\, x_{22} - b_{22}\, y_1 + b_{12}\, y_2) + p_2(- b_{21}\, q_1 + b_{11}\, q_2 + b_{21}\, x_{11} + \\ + b_{21}\, x_{12} - b_{11}\, x_{21} - b_{11}\, x_{22} + b_{21}\, y_1 - b_{11}\, y_2)). \tag{24}$$

3. Кінетична модель інфляції [13].

У кінетичній моделі інфляції швидкості відхилень індексу цін p та валового випуску Y пропорційні їх відхиленням від рівноважних значень:

$$\begin{cases} \dot{p} = -k_1(p - p_0), \\ \dot{Y} = -k_2(Y - Y_0), \end{cases} \tag{25}$$

де кінетичні коефіцієнти k_1, k_2 – зворотні часові параметри реакції економічної системи на встановлення рівноваги за величинами p і Y.

Рівноважні значення p_0, Y_0 можна обчислити з рівняння теорії грошової рівноваги

$$\mathrm{MV} = \mathrm{pC}, \tag{26}$$

де M – номінальна кількість операційних грошей, V – швидкість обертання грошей, p – індекс цін, C – рівень реального споживання, рівняння залежності C від валового випуску Y

$$\mathrm{C} = \mathrm{aY} \; (\mathrm{a}<0) \tag{27}$$

та співвідношення

$$Y = bW, \tag{28}$$

де W – заробітна плата.

Якщо частка $\delta < 0$ емісійних грошей M_1 спрямовується в промисловий сектор на збільшення початкової рівноважної зарплати W_0, то з рівнянь (26) – (28) отримуємо рівноважні значення індексу цін та валового випуску:

$$p_0 = \frac{M_0 + M_1}{aY} V, \tag{29}$$

$$Y_0 = b\left(W_0 + \frac{\delta M_1}{p} \right). \tag{30}$$

Рівняння кінетичної моделі інфляції отримуємо з рівнянь (25), (29), (30):

$$\begin{cases} \dot{p} = -k_1\left(p - \dfrac{M_0 + M_1}{aY} V \right), \\ \dot{Y} = -k_2\left(Y - bW_0 - \dfrac{b\delta M_1}{p} \right). \end{cases} \tag{31}$$

Ці рівняння нелінійні, в роботі [12] вони досліджуються чисельними методами.

З метою якісного дослідження рівнянь (31) запишемо їх у вигляді системи (1) за допомогою позначень:

$$q_1 = p, \; q_2 = Y, \tag{32}$$

$$f_1(q_1, q_2) = -k_1\left(q_1 - \frac{M_0 + M_1}{aq_2} V \right), \tag{33}$$

$$f_2(q_1, q_2) = -k_2\left(q_2 - bW_0 - \frac{b\delta M_1}{q_1} \right). \tag{34}$$

У гамільтоновій формі система (31) має вигляд (4) з функцією Гамільтона

$$H = -p_1 k_1\left(q_1 - \frac{M_0 + M_1}{aq_2} V \right) - p_2 k_2\left(q_2 - bW_0 - \frac{b\delta M_1}{q_1} \right). \tag{35}$$

4. Нелінійна динамічна модель ринку праці.

Моделі ринку праці розглядалися в багатьох працях, зокрема, в [14, 15].

Розглянемо модель зміни заробітної плати та зайнятості на ринку праці, на якому взаємодіють роботодавці та наймані робітники. Стан цього ринку можна охарактеризувати двома функціями часу – заробітною платою $p(t)$ та кількістю робітників $N(t)$. На ринку праці існує рівновага, тобто ситуація, коли за плату p_e згідні працювати N_e робітників. У реальних умовах функції $p(t)$, $N(t)$ відхиляються від рівноважних значень. Це може бути зумовлено, наприклад, фінансовими труднощами підприємств, звільненням робітників тощо. Введемо відхилення p, N від їх рівноважних значень:

$$x = p - p_e, \quad y = N - N_e. \tag{36}$$

Якщо роботодавці змінюють заробітну плату пропорційно відхиленню чисельності робітників від рівноважного значення, маємо:

$$\dot{x} = -ay, \tag{37}$$

де $a > 0$ – стала величина.

Якщо припустити, що чисельність робітників збільшується або зменшується пропорційно відхиленню заробітної плати від рівноважного значення, то маємо:

$$\dot{y} = bx, \tag{38}$$

де $b > 0$ – стала величина.

Рівняння (37), (38) жорсткої моделі ринку праці лінійні і можуть бути легко розв'язані. Для цього ці рівняння запишемо у вигляді одного диференціального рівняння другого порядку:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \quad (k^2 = ab), \tag{39}$$

яке має розв'язок:

$$x = A\, sin(kt + \beta), \tag{40}$$

де
$$A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2}, \qquad \beta = arcctg\frac{x_0}{v_0}, \tag{41}$$

а $x_0 = x(t_0)$, $v_0 = \dot{x}(t_0)$ – початкові значення змінних x, $\dot{x}$. Завдяки рівнянню (37)

$$y = -\frac{bA}{k} cos(kt + \beta) + y_0, \tag{42}$$

де $y_0 = y(t_0)$.

Згідно з лінійною теорією ринку праці заробітна плата та чисельність робітників періодично змінюється, а початкові значення їх однозначно визначають майбутнє ринку. Але в реальних умовах спостереження свідчать, що ринок праці не є періодичною економічною системою, відхилення її параметрів від рівноважних значень може бути значним і лінійна модель стає непридатною до аналізу системи. Постає питання створення нелінійних моделей ринку праці.

Згідно з рівнянням (37) швидкість зміни заробітної плати $\dot{x} > 0$, якщо $y < 0$ (чисельність робітників менше рівноважного значення N_e), вона зростає; якщо $y > 0$ (чисельність робітників більше N_e), маємо $\dot{x} < 0$ і заробітна плата зменшується.

Але ця пропорційна залежність швидкості зміни заробітної плати від зміни чисельності робітників в реальних умовах функціонування ринку праці не виконується, в загальному вигляді залежність нелінійна:

$$\dot{x} = f(y). \tag{43}$$

Згідно з рівнянням (38) швидкість зміни чисельності робітників $\dot{y} < 0$ якщо $x > 0$ (заробітна плата більше рівноважного значення p_e), воно зменшується; якщо $x < 0$ (заробітна плата менше p_e), маємо $\dot{y} > 0$ і чисельність робітників зростає.

Але в реальних умовах пропорційна залежність змін чисельності робітників від заробітної плати не виконується і в загальному вигляді залежність нелінійна:

$$\dot{y} = g(x). \tag{44}$$

Нелінійність поведінки ринку праці може бути обумовлена, наприклад, такими явищами: чисельність робітників зростає, а заробітна плата не зменшується (підприємство отримало додаткове фінансування); заробітна плата збільшується, а чисельність робітників не збільшується (дефіцит робочої сили); заробітна плата зменшується, а чисельність робітників не зменшується (безробіття).

Таким чином рівняння нелінійної моделі ринку праці мають вигляд:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(y), \\ \dot{y} = g(x). \end{cases} \tag{45}$$

Можна прийняти м'яку модель динаміки ринку праці, яка може бути представлена системою рівнянь (37), (38), в якій коефіцієнти a, b не сталі, а функції x, y:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x, y)y, \\ \dot{y} = b(x, y)x. \end{cases} \tag{46}$$

Систему (45) можна записати у вигляді (1), якщо позначити

$$q_1 = x,\ q_2 = y,\ f_1(q_1, q_2) = f(q_2),\ \ f_2(q_1, q_2) = g(q_1), \tag{47}$$

та в гамільтоновій формі з гамільтоніаном

$$H = p_1 f(q_2) + p_2\, g(q_1), \tag{48}$$

Аналогічно, у вигляді (1), (4) можна записати систему (46).

Для того щоб дослідити поведінку і властивості динамічної економічної системи, необхідно знайти розв'язок системи рівнянь (1) (або (4)) її моделі (проінтегрувати систему). За умови теореми існування та єдності розв'язку завдання початкових значень фазових змінних q_{10}, q_{20} та часу t_0 однозначно визначає розв'язок системи (1), (4) для усіх t (тобто однозначно визначає «минуле» і «майбутнє» економічної системи).

Однією з задач інтегрування є задача знаходження аналітичного розв'язку, що означає представити розв'язок системи за допомогою елементарних функцій або інтегралів від них (розв'язати систему в квадратурах). Розв'язок цієї задачі можливий лише в випадках небагатьох типів систем. Наприклад, в аналітичному вигляді можна побудувати розв'язки лінійних систем. У випадку нелінійних систем, коли розв'язок може бути отриманий в аналітичній формі, ці вирази можуть бути настільки складними, що робить їх аналіз практично неможливим.

Можна ставити задачу побудови розв'язків не в елементарних функціях, а у вигляді рядів. Але в деяких випадках ці ряди збігаються дуже повільно, тому на практиці неможливо ними користуватися.

Якщо неможливо знайти аналітичний розв'язок системи або він знайдений і ним важко користуватися при аналізі економічної задачі, тоді можна користуватися наближеними методами інтегрування нелінійних систем. При наявності комп'ютерної техніки наближені розв'язки деяких задач можуть бути отримані з достатньою точністю. Але такий розв'язок не може дати задовільного аналізу задач.

Крім того, для багатьох задач аналітичний або наближений розв'язок системи не має інтересу, тому що не може дати відповіді на запитання якісного порядку, наприклад, існують і скільки станів рівноваги економічної системи, стійкі або не стійкі ці стани, які розв'язки оптимальні з необхідного критерію. Таким чином, при розгляді динаміки економічних систем виникає питання якісного інтегрування системи або її дослідження. Ця ідея, яка з'явилася при розгляді проблем небесної механіки і далі використовувалась для розв'язання задач фізики, теорії керування, радіотехніки, електроніки тощо, теж може бути ефективною при дослідженні динаміки економічних систем.

Наведемо приклади дослідження динаміки економічних систем. Однією з проблем є задача дослідження поведінки системи біля її точок рівноваги, наприклад, задача стійкості.

Систему рівнянь (1) можна записати у вигляді одного диференціального рівняння:

$$\frac{dq_1}{dq_2} = \frac{f_1(q_1, q_2)}{f_2(q_1, q_2)}. \tag{49}$$

Стани рівноваги системи – це особливі її точки q_{10}, q_{20}, які можуть бути знайдені за допомогою рівнянь:

$$f_1(q_1, q_2) = 0,\ \ f_2(q_1, q_2) = 0 \tag{50}$$

Якщо ці точки знайдені, то вони можуть бути досліджені методами якісної теорії динамічних систем на площині [4].

Розглянемо, наприклад, рівняння кінетичної теорії інфляції (31), записавши їх у вигляді:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = a_1 q_1 + \dfrac{a_2}{q_2}, \\ \dot{q}_2 = b_1 q_2 + \dfrac{b_2}{q_1} + c_1, \end{cases} \tag{51}$$

де

$$a_1 = -k_1,\quad a_2 = \frac{k_1(M_0 + M_1)V}{a}, \tag{52}$$

$$b_1 = -k_2,\quad b_1 = k_2 b\delta M_1,\quad c_1 = k_2 b W_0.$$

Особливі точки можна знайти за допомогою системи рівнянь:

$$\begin{cases} a_1 q_1 q_2 + a_2 = 0, \\ b_1 q_1 q_2 + b_2 + c_1 q_1 = 0 \end{cases} \tag{53}$$

і вони мають вигляд:

$$q_{10} = \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_1 c_1}, \; q_{20} = \frac{c_1 a_2}{b_2 a_1 - b_1 a_2}. \tag{54}$$

Стани рівноваги системи, яка розглядається, можуть бути досліджені методами якісної теорії динамічних систем [4]. В залежності від значень параметрів системи можуть бути виділені її вузли, фокуси, сідлові точки, досліджені на стійкість та зроблені практичні висновки.

Ще однією проблемою є задача побудови наближених розв'язків рівнянь нелінійної теорії динаміки економічних систем. Її можна розв'язати за допомогою теорії збуджень гамільтонових систем [16].

Таким чином, в роботі запропонований новий підхід до аналізу економіко-математичних моделей, який зводить задачу динаміки економічної системи до аналізу загальної системи якісної теорії динамічних систем та рівнянь теорії гамільтонових систем. За допомогою методів цих теорій можливо якісно дослідити будь-яку економічну систему. В роботі намічені шляхи для подальших досліджень у цій галузі.

Література

1. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избр. тр., т. 1 / А. Пуанкаре. – М.: Наука, 1971. – 172 с.
2. Биркгоф Дж.Д. Динамические системы / Дж.Д. Биркгоф. – М. – Л.: Гостехиздат, 1941. – 320 с.
3. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения / А.М. Ляпунов. – М. – Л.: ОНТИ, 1935. – 386 с.
4. Андронов А.А. Качественная теория динамических систем / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, А.Г. Майер, И.И. Гордон. – М.: Наука, 1966. – 421 с.
5. Dirac P.A.M. Generatized hamiltonian dynamics / P.A.M. Dirac. – London, Proceed. Roy. Soc., 1958, vol. A246, p. 326–332.
6. Волькенштейн М.В. Биофизика / М.В. Волькенштейн. – М.: Наука, 1981. – 385 с.
7. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Т. 1,2 / Р. Гилмор. – М.: Мир, 1984. – 350, 283 с.
8. Sargent T. Macroeconomic Theory / T. Sargent. – Academic Press, 1987. – 285 c.
9. Turnovsky S. Methods of Macroeconomic Dynamics / S. Turnovsky. – The MIT Press, 1995. – 351 c.
10. Смирнов А.Д. Лекции по макроэкономическому моделированию: Учебное пособие для вузов / А.Д. Смирнов. – М.: ГУ ВШЭ, 2000. – 351 с.
11. Леонтьев В.В. Экономические эссе-теории, исследования, факты и политика: Пер. с англ. / В.В. Леонтьев. – М.: Политиздат, 1990. – 415 с.
12. Алексєєв А.А. Практичні моделі макроекономіки / А.А. Алексєєв, Д.А. Алексєєв. – К.: Наукова думка, 2006. – 267 с.
13. Накоряков В.Е. Кинетическая модель инфляции / В.Е. Накоряков, В.Г. Гасенко // Экономика и математические методы. – 2004. – 40, №1. – С. 129–134.
14. Самарский А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 320 с.
15. Лапшин В.І. Математичне моделювання коливань ринку робочої сили/ В.І. Лапшин // Зовнішня торгівля: економіка, фінанси, право. – 2010. – № 2. – С. 127–131.
16. Горр Г.В. Нелинейный анализ поведения механических систем / Г.В. Горр, А.А. Илюхин, А.М. Ковалев, А.Я. Савченко. – К.: Наукова думка, 1984. – 288 с.